

Dana HEUBERGER
Adrian ZANOSCHI

Gabriel POPA
Marius CICORTAȘ

Matematică pentru excelență

Clasa a V-a



Cuprins

Cuvânt-înainte	5
Enunțuri	
1 Numere naturale	7
2 Operații cu numere naturale	10
3 Ordinea efectuării operațiilor	14
4 Teorema împărțirii cu rest	17
5 Șiruri de numere naturale	22
Teste de evaluare	27
6 Calcul cu puteri	29
7 Cifrele unei puteri	32
8 Pătrate perfecte. Cuburi perfecte	35
9 Baze de numerație	40
Teste de evaluare	44
10 Divizibilitatea numerelor naturale. Proprietăți	46
11 Criterii de divizibilitate	51
12 Numere prime. Numere compuse	55
13 Descompunerea unui număr natural în factori primi. Numărul divizorilor unui număr natural	59
14 Numere pare. Numere impare	63
Teste de evaluare	67
15 Metoda grafică	69
16 Metoda comparației. Metoda reducerii la unitate	73
17 Metoda falsei ipoteze. Metoda figurativă	76
18 Metoda mersului invers	80
19 Metode combinate	84
20 Probleme non-standard	89
Teste de evaluare	94

21	Fracții ordinare	97
22	Fracții zecimale	102
23	Ecuatii	106
24	Elemente de geometrie	110
25	Probleme de mișcare	115
	Teste de evaluare	120
26	Probleme de numărare I	123
27	Probleme de numărare II	128
28	Metoda reducerii la absurd	133
29	Principiul cutiei	136
30	Invarianți	141
	Teste de evaluare	146
	Teste de evaluare finală	148
	Soluții	154

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

1. Numere naturale

Probleme rezolvate

1.R.1 Fie a, b, c trei cifre pare nenule. Ordonăți crescător numerele $\overline{bac}$, $\overline{9ab}$, $\overline{b9c}$, $\overline{1bc}$, $\overline{b1a}$, $\overline{99c}$ și $\overline{91a}$.

Soluție. Toate cele trei cifre sunt mai mari decât 1 și mai mici decât 9, prin urmare $\overline{1bc} < \overline{b1a} < \overline{bac} < \overline{b9c} < \overline{91a} < \overline{9ab} < \overline{99c}$.

1.R.2 Eliminați cât mai puține cifre din numărul 56767754, astfel încât numărul rămas să coincidă cu răsturnatul său.

Soluție. Evident, trebuie eliminată cifra 4, obținând 5676775. Din acest număr trebuie eliminate măcar încă două cifre. În concluzie, vom elimina, în total, trei cifre, numărul rămas fiind 56765, 57775 sau 57675.

1.R.3 Dispunem de cele trei cartonașe din imaginea alăturată. Stabiliți câte numere diferite de trei cifre se pot forma cu aceste cartonașe.



Soluție. Cartonașele cu 9 se pot întoarce, obținând cifra 6. Numerele ce se pot forma sunt 998, 989, 899, 698, 689, 869, 896, 986, 968, 668, 686, 866, în total 12 numere.

1.R.4 Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 100. Cristi și Irina șterg, pe rând, numerele de pe tablă, după următoarea regulă: întâi, Cristi șterge numerele de pe locurile impare, apoi Irina șterge numerele de pe locurile pare din șirul rămas. În continuare, Cristi șterge numerele de pe locurile impare din noul șir ș.a.m.d. Care este ultimul număr rămas pe tablă?

Soluție. După ce Cristi șterge numerele de pe locurile impare, rămân 50 de numere: 2, 4, 6, ..., 100. Irina șterge numerele de pe locurile pare și rămân 25 de numere: 2, 6, 10, ..., 98. Cristi șterge numerele de pe locurile impare; rămân 12 numere: 6, 14, 22, ..., 94. Irina șterge numerele de pe locurile pare și rămân 6 numere: 6, 22, 38, ..., 86. Cristi șterge numerele de pe locurile impare și rămân numerele 22, 54, 86, Irina îl șterge pe 54 și rămân 22, 86 și, în sfârșit, Cristi îl șterge pe 22. Ultimul număr rămas este 86.

1.R.5 a Câte numere de forma $\overline{xyz}$ au proprietatea $\overline{xyz} > \overline{xyx}$?

b Determinați numerele $\overline{xyz}$, știind că $\overline{xyz} > \overline{yxz}$ și că între cele două numere sunt exact 89 de numere naturale.

Soluție. a Pentru $x=1$, trebuie să avem $z=1, y \geq 2$; există 8 numere cu proprietatea dorită. Dacă $x=2$, atunci $z=1$ și y este oarecare, sau $z=2$ și $y \geq 3$; există $10+7=17$ numere cu proprietatea dată. Pentru $x=3$, avem $z=1$ și y este oarecare, sau $z=2$ și y este oarecare, sau $z=3$ și $y \geq 4$; găsim $2 \cdot 10 + 6 = 26$ de numere cu proprietatea din enunț.

Continuând, găsim:

$$8 + (10 + 7) + (2 \cdot 10 + 6) + (3 \cdot 10 + 5) + (4 \cdot 10 + 4) + (5 \cdot 10 + 3) + (6 \cdot 10 + 2) + (7 \cdot 10 + 1) + 8 \cdot 10 = 396 \text{ de numere.}$$

b Impunem condiția $\overline{xyz} - \overline{yxz} = 90$, adică $\overline{xy} - \overline{yx} = 9$, prin urmare $x = y + 1$. Numerele căutate sunt $\overline{21z}, \overline{32z}, \overline{43z}, \overline{54z}, \overline{65z}, \overline{76z}, \overline{87z}, \overline{98z}$, unde z este o cifră arbitrară.

Probleme propuse

1.P.1 Un vecin al unui vecin al numărului 1001 este vecin al unui vecin al numărului 997. Despre ce număr este vorba?

1.P.2 Dacă $49549 < \overline{495xy} < 49743 < \overline{49z4t}$, arătați că $x + y + z + t \geq 13$.

1.P.3 Diferența dintre rotunjirea numărului $\overline{374a39}$ la ordinul sutelor și rotunjirea numărului $\overline{3535b7}$ la ordinul zecilor este 21150. Determinați cifrele a și b .

1.P.4 Notăm cu $\max(a, b)$ pe cel mai mare dintre numerele a și b și cu $\min(a, b)$ pe cel mai mic dintre numerele a și b . Calculați $\max(4, \max(3, 5)) - \min(\max(2, 3), \min(5, 6))$.

1.P.5 Anul 1790 are proprietatea că suma cifrelor sale este 17.

a Din ce secol face parte acest an?

b Câți ani din secolul respectiv, scriși cu cifre arabe, au suma cifrelor 17?

1.P.6 Determinați cel mai mare număr natural cu proprietatea că oricare două cifre consecutive formează un număr care se împarte exact la 23.

1.P.7 Determinați cifrele x, y, z, a și b , știind că $(x+1) \cdot (y+2) \cdot (z+3) = \overline{13ab}$.

1.P.8 Un număr de cel puțin trei cifre distincte se numește *ondulat* dacă printre cifrele sale există trei cifre alăturate a, b, c astfel încât fie $a < b > c$, fie $a > b < c$. Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare dintre numerele ondulate de patru cifre.

1.P.9 Se numește *palindrom* un număr care coincide cu răsturnatul său.

Mergând cu mașina, cu viteză constantă, Adrian observă la ora 9:10 că pe kilometrajul de la bord apare numărul 12921. La ora 11:00, pe kilometraj apare următorul număr palindrom. La ce oră va observa Adrian a treia oară un astfel de număr?

1.P.10 Determinați numerele $\overline{abcd}$ pentru care $a < b < c < d$ și $a \cdot b = c + d$.

1.P.11 Determinați toate numerele de cinci cifre cu proprietatea că fiecare cifră, începând cu cea a zecilor, este strict mai mare decât suma cifrelor scrise la dreapta sa.

ONM 2008

1.P.12 Taiem zece cifre din numărul 3021302130213021, astfel încât numărul rămas să fie cel mai mic posibil. Care este numărul rămas?

1.P.13 Se consideră numărul obținut prin scrierea, unul după altul, a tuturor numerelor de la 1 la 100. Aflați cel mai mare număr care se poate obține ștergând o sută de cifre.

1.P.14 Determinați cel mai mic număr natural care are produsul cifrelor egal cu 240.

1.P.15 Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre numerele de trei cifre pentru care cifra din mijloc este produsul celorlalte două cifre. Câte astfel de numere există?

1.P.16 Numărul $\overline{abcba}$ reprezintă codul unui seif pe care Maria dorește să îl deschidă. Fata știe că suma cifrelor de pe locurile pare ale numărului este egală cu suma cifrelor de pe locurile impare. Care este cel mai mare număr de încercări pe care trebuie să le facă Maria dacă are ghinion și nimerește mai întâi toate combinațiile greșite?

1.P.17 Determinați cel mai mic și cel mai mare dintre numerele de 200 de cifre în a căror scriere apare de exact o sută de ori cifra 1.

1.P.18 Fie x , y și z trei numere naturale nenule astfel încât $x \geq 3y - 2$, $z \leq y + 2$ și $3z \geq x + 8$. Stabiliți ordinea numerelor x , y și z .

1.P.19 Câte inegalități de forma $\overline{a1b} < \overline{8c2}$ putem scrie?

1.P.20 Se scriu, unul după altul, primele 100 de numere pare nenule, apoi următoarele 100 de numere impare: 24681012...200201203...399. Care este cifra de pe locul 399 în numărul astfel format?

1.P.21 Se consideră numărul $N = 102003000 \dots \underbrace{9900 \dots 0}_{99 \text{ de } 0}$. Stabiliți pe a câta poziție a numărului N se află cel de-al 100-lea zerou al numărului.

1.P.22 Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 100. Lucian și Dana șterg, pe rând, numerele de pe tablă, după următoarea regulă: întâi, Lucian șterge numerele de pe locurile impare, apoi Dana șterge numerele de pe locurile pare din șirul rămas. În continuare, Lucian șterge numerele de pe locurile pare din noul șir ș.a.m.d. Care este ultimul număr rămas pe tablă?

1.P.23 Pe ecranul unui calculator sunt scrise toate numerele de la 1 la 1000. Ana utilizează un program care șterge de pe ecran numerele care conțin cifra 3. Câte cifre de 0 rămân scrise pe ecran?

1.P.24 Pe o tablă este scris numărul 123. La fiecare pas, putem înlocui numărul de pe tablă cu numărul care se obține schimbând între ele locurile a două cifre ale numărului existent pe tablă în acel moment (de exemplu, din 123 putem obține 132, după un pas, dar nu și 312). Arătați că după 123 de pași nu se poate obține numărul inițial.

1.P.25 Pe o tablă este scris numărul 7654321. Avem voie să efectuăm următoarea transformare a numărului scris pe tablă la un moment dat: alegem două cifre alăturate, scădem 1 din fiecare și le schimbăm locurile. Care este cel mai mic număr ce se poate obține după efectuarea unor astfel de transformări?

2. Operații cu numere naturale

Probleme rezolvate

2.R.1 Determinați numerele ale căror sumă și produs sunt, ambele, egale cu 20.

Soluție. Deoarece $20 = 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1$, soluțiile problemei sunt: $2, 10, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{8 \text{ de } 1}$ sau $4, 5, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{11 \text{ de } 1}$ sau $2, 2, 5, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{11 \text{ de } 1}$.

2.R.2 Aflați cifra unităților numărului $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 - 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$.

Soluție. Descăzutul conține factorul 5 și cel puțin un factor par, deci are cifra unităților 0. Scăzătorul conține factorul 5 și toți ceilalți factori sunt numere impare, deci are cifra unităților 5. Rezultă că ultima cifră a numărului A este 5.

2.R.3 În dreapta unui număr natural de două cifre scriem de încă două ori acest număr. De câte ori este mai mare numărul astfel obținut decât cel inițial?

Soluție. Fie $\overline{ab}$ numărul inițial. Numărul nou obținut este $\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10101$, care este de 10101 ori mai mare decât cel inițial.

Altfel: folosind algoritmul de împărțire, avem $\overline{ababab} : \overline{ab} = 10101$, rest 0.

2.R.4 Spunem că un număr este *complet* dacă este suma a doi termeni, unul de cinci cifre, celălalt de patru cifre, iar scrierile celor doi termeni cuprind, împreună, toate cifrele nenule. Dacă M și N sunt două numere complete, arătați că $M - N \leq 90126$.

Soluție. Cea mai mare valoare pe care o poate lua numărul M este 106173 (de exemplu, pentru $97531 + 8642$), iar cea mai mică valoare pe care o poate lua numărul N este 16047 (de exemplu, pentru $13579 + 2468$). Rezultă că $M - N \leq 90126$.

2.R.5 Câte numere de forma $\overline{abc}$ au proprietatea că $4 \cdot \overline{bc} = 7 \cdot \overline{cb}$?

Soluție. Din $4(10b + c) = 7(10c + b)$ obținem $b = 2c$. Cum b și c sunt nenule (apar ca prime cifre ale unor numere), avem patru modalități de alegere a perechii (b, c) . Pentru fiecare astfel de pereche, cifra a poate fi aleasă în câte nouă moduri, deci obținem $4 \cdot 9 = 36$ de numere.

2.R.6 Prima cifră a unui număr natural de șase cifre este 6. Dacă se mută această cifră la sfârșit, se obține un număr de patru ori mai mic. Aflați numărul.

Soluția 1. Avem $\overline{6abcde} : 4 = \overline{abcde6}$. Efectuăm împărțirea, folosind algoritmul uzual: cum $6 : 4 = 1$ (rest 2), înseamnă că $a = 1$. Din $61 : 4 = 15$ (rest 1), rezultă $b = 5$. Apoi, $615 : 4 = 153$ (rest 3), așadar $c = 3$.

Deoarece $6153 : 4 = 1538$ (rest 1), deducem că $d = 8$. În sfârșit, din $61538 : 4 = 15384$ (rest 2), găsim $e = 4$, iar $615384 : 4 = 153846$. Numărul căutat este 615384.

Soluția 2. Numărul dorit este $\overline{6abcde} = 600000 + N$, cu $N = \overline{abcde}$. Din datele problemei, $600000 + N = 4 \cdot (10N + 6)$. Rezultă că $N = 599976 : 39 = 15384$, deci numărul căutat este 615384.

2.R.7 Fie a, b, c, d, x, y, z, t cifre astfel încât $0 < a < b \leq c < d$ și $\overline{dcba} = \overline{abcd} + \overline{xyzt}$. Determinați toate valorile posibile ale sumei $S = \overline{xyzt} + \overline{tzyx}$.

ONM 2013

Soluție. Din $\overline{dcba} - \overline{abcd} = \overline{xyzt}$, cu $a < d$, obținem $t = 10 + a - d$.

Dacă $b = c$, atunci $z = y = 9$ și $x = d - 1 - a$, așadar $x + t = 9$, $y + z = 18$ și obținem $S = 1001(x + t) + 110(y + z) = 10989$. Dacă $b < c$, atunci $z = 9 + b - c$, $y = c - b - 1$ și $x = d - a$, prin urmare $x + t = 10$, $y + z = 8$, iar $S = 10890$.

Probleme propuse

2.P.1 Un melc urcă pe un stâlp cu înălțimea de 4 m, pornind de la baza acestuia. Cât timp soarele e pe cer, melcul urcă 70 cm, dar noaptea adoarme și alunecă 40 cm. În a câta zi ajunge melcul în vârful stâlpului?

2.P.2 Cosmin și Paul sunt doi curieri care trebuie să distribuie niște materiale publicitare locuitorilor de pe Strada Lungă. Ei pleacă de la biroul lor, aflat pe Strada Lungă, la numărul n : Cosmin către stânga, până la numărul 26 al străzii, iar Paul către dreapta, până la numărul 556 al străzii. Cei doi curieri lasă câte un pliant la fiecare număr al străzii, numărul total de pliante distribuite de fiecare dintre ei fiind același. Aflați numărul n .

2.P.3 În adunarea $\text{UNU} + \text{UNU} = \text{DOI}$, literele diferite reprezintă cifre diferite. Calculați suma numerelor UNU care verifică egalitatea.

2.P.4 Suma a 17 numere naturale distincte este 152.

a Aflați produsul numerelor.

b Determinați cele 17 numere.

2.P.5 Determinați cea mai mică și cea mai mare dintre valorile posibile ale numărului $A = \overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba}$, unde a, b și c sunt cifre nenule distincte.

2.P.6 a Arătați că $\overline{abcabc}$ se împarte exact la 1001.

b Aflați câtul și restul împărțirii lui $\overline{ababa}$ la 101.

2.P.7 Determinați numerele naturale $\overline{abc}$ cu proprietatea că $\overline{abc} = 90 \cdot a + 25 \cdot b$.

2.P.8 Găsiți numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 3000$.

2.P.9 Determinați numerele naturale $\overline{abcd}$ pentru care $\overline{aaaa} - \overline{bbb} + \overline{cc} - d = 1234$.

2.P.10 Suma a două numere naturale M și N este 160. Dacă ștergem una dintre cifrele lui M , se obține numărul N . Aflați numerele M și N .

2.P.11 Determinați numerele naturale care, adunate cu suma cifrelor lor, dau rezultatul 78912.

2.P.12 Determinați numerele naturale care se micșorează cu 2017 atunci când le ștergem ultimele două cifre.

OJM 2017

2.P.13 Aflați numerele naturale de două cifre care se măresc de șapte ori atunci când li se adaugă o cifră (ordinea cifrelor inițiale nu se schimbă).

2.P.14 Pe un raft sunt 11 pungi cu câte 5 bomboane. 10 dintre pungi conțin bomboane care cântăresc 10 g fiecare, iar bomboanele din cea de a unsprezecea pungă sunt mai ușoare cu 1 g. Folosind un cântar cu afișaj, dorim să determinăm, din cel mult două cântăriri, care este punga cu bomboane mai ușoare. Cum putem proceda?

2.P.15 La un turneu de fotbal în sală participă patru echipe. Se acordă 2 puncte pentru o victorie, 1 punct pentru un meci egal și 0 puncte pentru o înfrângere. Oricare două echipe joacă între ele un singur meci. În clasamentul final nu există echipe cu același număr de puncte. Care este numărul minim de puncte pe care îl poate avea echipa câștigătoare?

2.P.16 Pe o masă sunt 31 de cartonașe, pe care sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 31. Alex și Bogdan își aleg câte 15 cartonașe și observă că suma numerelor de pe cartonașele lui Alex este triplul sumei numerelor de pe cartonașele lui Bogdan. Aflați numărul scris pe cartonașul rămas pe masă.

OJM 2016

2.P.17 Împărțiți numerele naturale de la 1 la 32 în două grupe, ambele având același număr de numere și aceeași sumă a numerelor.

2.P.18 Șapte numere naturale cu suma 18 sunt așezate pe un cerc. Arătați că există două numere vecine pe cerc cu suma cel puțin egală cu 6.

2.P.19 Constantin are 144 de bile, pe care le distribuie în patru cutii, respectând următoarele reguli:

- i** numărul bilelor din prima cutie diferă cu 4 de numărul bilelor din a doua cutie;
- ii** numărul bilelor din a doua cutie diferă cu 3 de numărul bilelor din a treia cutie;
- iii** numărul bilelor din a treia cutie diferă cu 2 de numărul bilelor din a patra cutie;
- iv** în prima cutie se află cele mai multe bile.

Care este numărul maxim de bile pe care Constantin le poate pune în a doua cutie?

2.P.20 Adunând două câte două patru numere diferite, cinci dintre cele șase sume care se obțin sunt 5, 7, 8, 9 și 11, iar a șasea este egală tot cu una dintre aceste valori. Aflați numerele.

2.P.21 Determinați cifrele distincte nenule x, y, z, t, u și v , dacă $\overline{xyz} = 8 \cdot \overline{tuv}$.

2.P.22 Koallo este un copil care locuiește în frumosul orașel Oloko din Nigeria. Fiind pasionat de matematică, el observă că, dacă înlocuiește cu cifre distincte literele K, O, A, L și înmulțește numărul de cinci cifre corespunzător numelui orașului cu 11, obține numărul ce corespunde numelui său. Cu ce cifre trebuie înlocuite cele patru litere?

Concurs Canada

2.P.23 Reconstituiți înmulțirea alăturată, știind că literele distincte nu reprezintă, obligatoriu, cifre distincte.

$$\begin{array}{r} a \ 3 \ b \times \\ \hline c \ d \\ e \ f \ 3 \ g \\ h \ i \ k \\ \hline 2 \ x \ y \ 3 \end{array}$$

2.P.24 Determinați cifrele a, b, c și d , știind că $\overline{cbba} \cdot \overline{abc} = \overline{abcdba}$.

2.P.25 Reconstituiți împărțirea:

$$\begin{array}{r} * \ * \ * \ * \ * \ * \ * \ : \ * \ * \ 1 \ = \ 8 \ * \ * \ * \ * \\ * \ * \ * \\ \hline = \ = \ = \ * \ * \ * \ * \\ \hline \ * \ * \ * \ * \\ \hline = \ = \ = \ = \end{array}$$

2.P.26 Numerele naturale n și $5n$ au, fiecare, număr par de cifre. Demonstrați că în scrierea lui n apare cifra 1.

2.P.27 Demonstrați că suma numerelor $\overline{abcde}$ și $\overline{edcba}$ are cel puțin o cifră pară.

2.P.28 Spunem că un an este *foarte par* dacă scrierea sa este de patru cifre, toate pare.

a Determinați cea mai mare distanță posibilă între doi ani foarte pari succesivi.

b Este ușor de observat că distanța minimă între doi ani foarte pari succesivi este 2. Care este a doua cea mai mică distanță posibilă între doi ani foarte pari succesivi?

Concursul Traian Lalescu, 2016

2.P.29 Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte având aceeași sumă a cifrelor. Demonstrați că printre numerele de forma $\underbrace{99\dots9}_{n \text{ de } 9}$, $n \in \mathbb{N}^*$, există o infinitate de numere olimpice și o infinitate de numere

care nu sunt olimpice.

ONM 2012

2.P.30 Un număr natural A este scris cu n cifre nenule, $n \geq 1$. Numărul B se obține din numărul A prin rearanjarea cifrelor acestuia. Se știe că $A + B = \underbrace{100\dots0}_{n \text{ de } 0}$.

a Pentru $n = 3$, dați exemplu de numere A și B având proprietățile din enunț.

b Arătați că n este număr natural impar.

c Demonstrați că în scrierea lui A există cel puțin o cifră egală cu 5.

OJM 2013

3. Ordinea efectuării operațiilor

Probleme rezolvate

3.R.1 Adugați paranteze astfel încât rezultatul calculului $7 \cdot 3 + 5 - 3 \cdot 2 + 8 - 2$ să fie, pe rând, 24, 103, respectiv 528.

Soluție. Avem: $7 \cdot (3 + 5) - 3 \cdot (2 + 8) - 2 = 24$, $7 \cdot [3 + (5 - 3) \cdot 2 + 8] - 2 = 103$, respectiv $[7 \cdot (3 + 5) - 3] \cdot (2 + 8) - 2 = 528$.

3.R.2 Stabiliți paritatea numărului $(2a + 3b + 5) \cdot (1 + 5 + 9 + 13 + \dots + 101)$, unde a și b sunt două numere naturale.

Soluție. Suma din ce-a de-a doua paranteză are 26 de termeni impari, deci este un număr par. Prin urmare, produsul celor două paranteze este par, indiferent de valorile numerelor a și b .

3.R.3 Elevii unei școli au mers într-o excursie. Fiecare copil are un anumit număr (nenul) de bancnote de 10 lei: 453 de elevi au cel puțin 10 lei, 320 au cel puțin 20 de lei, 290, cel puțin 30 de lei, 164, cel puțin 40 de lei, 137, cel puțin 50 de lei, 115, cel puțin 60 de lei, 99, cel puțin 70 de lei, 81, cel puțin 80 de lei, 40, cel puțin 90 de lei, iar 25 au exact 100 de lei. Aflați ce sumă au, în total, elevii participanți la excursie.

Soluție. Numărul elevilor care au avut exact 10 lei este $453 - 320 = 133$, numărul elevilor care au avut exact 20 de lei este $320 - 290 = 30$ ș.a.m.d. Suma totală este $10 \cdot (453 - 320) + 20 \cdot (320 - 290) + 30 \cdot (290 - 164) + 40 \cdot (164 - 137) + 50 \cdot (137 - 115) + 60 \cdot (115 - 99) + 70 \cdot (99 - 81) + 80 \cdot (81 - 40) + 90 \cdot (40 - 25) + 100 \cdot 25 = 17240$ lei.

3.R.4 Spunem că unui număr n i se aplică o *transformare interesantă* dacă n se înmulțește cu 2, apoi rezultatul se mărește cu 4; spunem că lui n i se aplică o *transformare deosebită* dacă n se înmulțește cu 3, apoi rezultatul se mărește cu 9; spunem că lui n i se aplică o *transformare minunată* dacă n se înmulțește cu 4, apoi rezultatul se mărește cu 16.

a Arătați că există un singur număr natural care, prin trei transformări succesive, una interesantă, una deosebită și una minunată, aplicate în această ordine, devine 2020.

b Determinați numerele naturale care, în urma a două transformări succesive diferite dintre cele trei, devin 2014.

ONM 2014

Soluție. a Trebuie determinate numerele n pentru care $4[3(2n + 4) + 9] + 16 = 2020$. Obținem $n = 80$.

b O transformare deosebită are drept rezultat un număr care se împarte exact la 3, iar una minunată are drept rezultat un număr care se împarte exact la 4. Numărul 2014 nu se împarte exact nici la 3, nici la 4, prin urmare ultima transformare aplicată nu poate

fi decât una interesantă, aplicată numărului 1005, care se obține în urma primei transformări. Cum 1005 este impar, prima transformare nu poate fi decât una deosebită, iar numărul inițial este 332.

3.R.5 Determinați numerele naturale a și b pentru care $ab + 3a + 2b = 15$.

Soluție. Avem $a(b+3) + 2b = 15$, de unde $a(b+3) + 2(b+3) = 15 + 6 = 21$, așadar $(a+2)(b+3) = 21$. Deoarece $a+2 \geq 2$ și $b+3 \geq 3$, obținem cazurile:

- I. $a+2=3$ și $b+3=7$, de unde rezultă că $a=1$ și $b=4$;
- II. $a+2=7$ și $b+3=3$, de unde obținem soluția $a=5$ și $b=0$.

Probleme propuse

3.P.1 Știm că $a \heartsuit b = 2a + 3b + 1$ (de exemplu, $2 \heartsuit 3 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 = 14$).

Calculați $(5 \heartsuit 4) \heartsuit 3$.

3.P.2 Determinați numerele naturale x și y pentru care

$$(1 + 2 \cdot x \cdot y + 7 \cdot 5) : (123 - 99) \cdot 5 + 13 = 23.$$

3.P.3 Adăugați paranteze în relația $1 + 2 \cdot 3 + x - 4 \cdot 5 : 6 \cdot 7 = 8$, astfel încât egalitatea să fie adevărată pentru $x = 4$.

3.P.4 Adăugați paranteze, astfel încât egalitatea $1 + 2 : 3 + 4 : 5 + 6 : 7 + 8 : 9 + 10 = 11$ să fie adevărată.

3.P.5 Folosind patru cifre de 2, operațiile aritmetice și paranteze, obțineți (pe rând) rezultatele 0, 1, 2, 3, 4, 5 și 6.

3.P.6 Folosind 2001 cifre de 3, operațiile aritmetice și paranteze, obțineți rezultatul 37 în cel puțin două moduri.

3.P.7 Adăugați paranteze în expresia $3 \cdot 17 + 32 : 4 + 3$, astfel încât să obțineți:

a cel mai mic număr posibil;

b cel mai mare număr posibil.

3.P.8 Printre numerele 7353, 9674, 1942, 8741, 6496, 6431, 7896, 8286, 3764 și 5553 există un intrus: acesta nu respectă relația dintre cifre existentă pentru celelalte nouă numere. Determinați acest intrus.

3.P.9 Determinați valorile numărului natural $n \geq 3$, știind că ultima cifră a sumei $1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ este 2.

3.P.10 Calculați: $101 + 97 + 93 + \dots + 5 - (99 + 95 + 91 + \dots + 3)$.

3.P.11 Calculați: $(1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + \dots + 100 + 101 - 102) : 17$.

3.P.12 Calculați: $1000 \cdot 998 - 998 \cdot 996 + 996 \cdot 994 - 994 \cdot 992 + \dots + 8 \cdot 6 - 6 \cdot 4$.

3.P.13 Considerăm egalitatea $1 \square 2 \square 3 \square \dots \square 101 = x$, unde căsuțele pot fi completate cu unul dintre semnele „+” sau „-”. În plus, putem folosi paranteze pentru asocierea termenilor. Decideți dacă există vreo modalitate prin care să obținem rezultatul:

a $x = 2$;

b $x = 1$.

3.P.14 Calculați:

a $A = 9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99\dots9}_{100 \text{ de } 9}$

b $B = 2 + 22 + 222 + \dots + \underbrace{22\dots2}_{100 \text{ de } 2}$.

3.P.15 Numărul A are 30 de cifre, toate egale cu 3, iar numărul B are 90 de cifre, toate egale cu 9. Câte cifre are produsul numerelor A și B ?

3.P.16 Arătați că $(\overline{abcd} - \overline{bcd}) : 1000 + (\overline{bcd} - \overline{cd}) : 100 + (\overline{cd} - d) : 10 + d \geq a + b + c$, oricare ar fi cifrele a, b, c nenule și d cifră oarecare. Când are loc egalitatea?

3.P.17 Produsul a două numere este 432. Dacă primul dintre ele se mărește cu 18, iar al doilea se micșorează de două ori, atunci produsul rămâne neschimbat. Aflați numerele.

3.P.18 Se dau numerele a, b, c , astfel încât $a(b+c) = 180$, $c(b+c) = 720$ și $c - a = 9$. Aflați $a + c$.

3.P.19 Se consideră numerele naturale a, b și c , astfel încât $a + 2b + 3c = 146$ și $3a + 2b + c = 106$. Calculați $(2a + b) \cdot (b + 2c)$.

3.P.20 Se consideră numerele naturale a, b, c și d , astfel încât $a + b = 11$, $b + c = 22$, iar $c + d = 33$. Calculați $(2a + 5b + 7c + 4d) : (a + d)$.

3.P.21 Determinați numerele naturale a și b pentru care $ab + 5a + 2b = 20$.

3.P.22 Aflați numerele naturale de trei cifre $\overline{abc}$, cu proprietatea că $b \cdot \overline{ac} = c \cdot \overline{ab} + 10$.

OJM 2014

3.P.23 Aflați numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab} = (a - b) \cdot (\overline{ba} - 3)$.

3.P.24 Se consideră produsul $P = \overline{ab} \cdot \overline{cd} \cdot e$. Înlocuiți cele cinci litere cu cifrele 1, 2, 3, 4, 5, folosind fiecare cifră o singură dată, astfel încât produsul P să fie maxim.

3.P.25 Fie $n \geq 2$ un număr natural. Spunem că numărul natural $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ are proprietatea (P) dacă $\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Determinați toate numerele naturale care au proprietatea (P).

ONM 2017